フーリエ級数・フーリエ変換メモ

峯松信明

2013 年 6 月 4 日

1　フーリエ級数

1.1　はじめに

周期的な波形 $f(t)$ が与えられた時，それを，sin，cos の奇麗な波形に分解することを，フーリエ級数に展開する，と言う。これをもう少し詳細に見て行こう。なお，任意の周期的波形が本当に sin，cos に分解できるのか？ということに疑問を持っていた学生もいたので，その点についても (大雑把ではあるが) 説明する。

まず，下記で定義される関数 $f(t)$ を考える。

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} \tag{1}$$

$\sum$ の中身は，基本音である角周波数 ω の波（この場合周期は $\frac{2\pi}{\omega}$）と，その倍音（角周波数 $n\omega$ の波）の足し合わせによって表現されている。角周波数が $n\omega$ の cos，sin は，周期が $\frac{2\pi}{n\omega} = \frac{1}{n}\frac{2\pi}{\omega}$ であるため，基本音の周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ の n 分の 1 の周期を持つ。n 分の 1 が周期なら，当然，n 周期分を一単位としても，波形が繰り返されることになる。結局，$\sum$ の中のどの sin もどの cos も，$\frac{2\pi}{\omega}$ を周期として持つこととなり，$\sum$ 全体としても $\frac{2\pi}{\omega}$ を周期として持つこととなる。先頭の $\frac{1}{2}a_0$ は，波形を全体的に上げるか，下げるかの効果を持つだけであり，周期性とは無関係である。

フーリエ級数とは，周期 T を持つ任意の周期波形に対して，$\omega = \frac{2\pi}{T}$ で計算される角周波数の sin，cos を基本音とし，これらと，これらの倍音によって当該の周期波形が表現できる，と主張するものである。これは，本当なのだろうか？

1.2　a_n，b_n の求め方

上記で定義される $f(t)$ が波形として与えられている状況を考える。つまり sin，cos の足し合わせで表現されることは確約されているものの，a_n，b_n が何であったか忘れてしまった状況である。$f(t)$ の波形のみが与えられている状況である。この時，a_n，b_n はどうやって求めるのか？

以下，a_n，b_n の導出を試みるが，その前に準備体操が必要となる。三角関数の積分に関して知

られた事実を列挙する。

1.2.1　三角関数の積分・その 1

$$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \int_0^T \sin(n\omega t)dt = 0 \tag{2}$$

T は ω に対する周期なので，$n\omega$ から見れば，上記は n 周期分積分していることになる。n 周期分の範囲で，$\cos(n\omega t)$ や $\sin(n\omega t)$ の波形の面積を求めていることになる。n 個分波が描かれるので，当然面積はプラス，マイナスで 0 になるのは当然。一応，積分計算してみる。

$$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^T = \frac{\sin(n\omega T)}{n\omega} = \frac{\sin(2\pi n)}{n\omega} = 0 \tag{3}$$

$\sin(n\omega t)$ の積分も同様に導出できる。

1.2.2　三角関数の積分・その 2

今度は 2 乗してみる。

$$\int_0^T \cos^2(n\omega t)dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t)dt = \frac{T}{2} \tag{4}$$

2 乗しているので，値が負になれず，積分値（面積）は正の値をとることになる。それが幾らになるのか，ということである。「倍角の公式」を使うと，積分できる。

$$\int_0^T \cos^2(n\omega t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left\{1+\cos(2n\omega t)\right\}dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2n\omega t)}{2n\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\sin(4\pi n)}{2n\omega}\right) = \frac{T}{2} \tag{5}$$

$\sin^2(n\omega t)$ の積分も同様に導出できる。

1.2.3　三角関数の積分・その 3

今度は $\sin^2$ ではなく，角周波数の異なる二つの $\sin$ の積の積分である。以下，$m \neq n$ とする。

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \int_0^T \sin(m\omega t)\sin(n\omega t)dt = 0 \tag{6}$$

同じ角周波数の $\sin$ 同士なら，常に値は正となるが，$m\omega$ と $n\omega$ の積の場合はどうなるか，という問いである。「加法公式」を使ってみる。

$$\int_0^T \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left\{\cos((m+n)\omega t) + \cos((m-n)\omega t)\right\}dt \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((m+n)\omega t)}{(m+n)\omega} + \frac{\sin((m-n)\omega t)}{(m-n)\omega}\right]_0^T \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(2\pi(m+n))}{(m+n)\omega} + \frac{\sin(2\pi(m-n))}{(m-n)\omega}\right\} = 0 \tag{9}$$

$\sin(m\omega t)\sin(n\omega t)$ の場合も同様に証明できる。

1.2.4　三角関数の積分・その 4

次は sin と cos の積に対する積分である。以下，$m \neq n$ とする。

$$\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = 0 \tag{10}$$

ここでも「加法公式」を使ってみる。

$$\int_0^T \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)dt = \int_0^T \frac{1}{2}\left\{\sin((m+n)\omega t) - \sin((m-n)\omega t)\right\} dt \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos((m+n)\omega t)}{(m+n)\omega} + \frac{\cos((m-n)\omega t)}{(m-n)\omega}\right]_0^T \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{-\cos(2\pi(m+n))}{(m+n)\omega} - \frac{-\cos(0)}{(m+n)\omega} + \frac{\cos(2\pi(m-n))}{(m-n)\omega} - \frac{\cos(0)}{(m-n)\omega}\right\} \tag{13}$$

1.2.5　三角関数の積分・その 5

今度は sin と cos の積に対する積分である。今度は，同じ角周波数を有している。

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(n\omega t)dt = 0 \tag{14}$$

証明は略。結局のところ，sin と cos の積は，角周波数の異同に依らず 0 となる。

1.2.6　a_n，b_n の求め方

当初の問題の「$f(t)$ の波形のみが与えられている時に，a_n，b_n はどうやって求めるのか？」という問題に戻る。まず，何も考えずに $f(t)$ を積分してみる。当然 0 から T の間での積分である。

$$\int_0^T f(t)dt = \tag{15}$$

$$\int_0^T \frac{1}{2}a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \left\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right\} dt \tag{16}$$

上式に「三角関数の積分・その 1」を適用すると，

$$\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}a_0 T \tag{17}$$

が導かれ，結局，

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{18}$$

が導かれる。a_n，b_n が未知であっても，与えられた $f(t)$ を積分すれば，a_0 を得ることができる。

次に，$f(t)$ に $\cos(m\omega t)$ を掛けた結果を積分してみることにする。

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt = \tag{19}$$

$$\frac{1}{2}a_0\int_0^T \cos(m\omega t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt + b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)dt\right] \tag{20}$$

上式に「三角関数の積分・その 1」と「その 3」「その 4」「その 5」を適用すると，下記となる。

$$\int_0^T f(t)\cos(m\omega t)dt = a_m\int_0^T \cos^2(m\omega t)dt = a_m\frac{T}{2} \tag{21}$$

よって（m と n を表記上入れ替えて），

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{22}$$

を得る。なお，上式に $n = 0$ とすれば，$a_0 = \frac{2}{T}\int f(t)dt$ は得られる。

同様に，$f(t)$ に $\sin(n\omega t)$ を掛けて積分をすると，以下の式が導かれる。

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{23}$$

なお, $t = 0 \sim T$ の積分期間は, 扱っている $f(t)$ が周期関数であるため, 積分範囲を $t = -\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}$ としても上記の式は同様に成立する。a_n，b_n の導出は下記のように表現されることもある。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{24}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{25}$$

さて，これで**式 (43)** に示した $f(t)$ に対して，その a_n，b_n が未知であっても，上記の様にしてそれを再度求めることが可能であることが分った。

1.3　フーリエ級数の形式で表現できない周期 T の波形とは？

さて，上記までの検討は，あくまでも**式 (43)** で表現される周期 T の波形を対象としていた。様々な a_n，b_n を使えば無数の「周期 T の波形」を扱えることが可能である。しかし，全ての周期波形を対象とできるのか？

結論を言えば，厳密に言えば「No」である。フーリエ級数展開で表現できない周期波形は可能である。例えば，一周期中に不連続点がある場合には厳密には一致しなくなる。これは，$\sum$ の中の sin，cos が全て連続的な変化をする波形であるため，ある値 t_0 で値が不連続となる（飛んでしまう）ような波形はそもそも表現できない。しかし，このような波形を対象としなければ「任意の周期波形を sin，cos に分解できる」という表現は実質上「Yes」と言って差し支えないだろう。

1.4　角周波数 ω の成分の強さは？

フーリエ級数を sin，cos の合成公式を使って sin，あるいは cos にまとめてみる。

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\} &(26)\\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(n\omega t+\alpha_n)\right\} &(27)\\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(n\omega t-\beta_n)\right\} &(28)
\end{aligned}
$$

となり，いずれにせよ，角周波数 $n\omega$ の成分の強さは $\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ であることが分る。また，3/30 に行なわれた「音響分析のいろは」では，cos 項を無視して説明していたことになる。各成分の波形の横方向の移動量（位相）を 0 とした説明となっている。

2　複素フーリエ級数

再度，フーリエ級数を示す。

$$
f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\} \tag{29}
$$

$\cos(n\omega t)$ と $\sin(n\omega t)$ と二種類の成分が必要となっている。合成公式で強引にまとめることは出来るが，$+\alpha$ とか $-\beta$ とかあって見苦しい。もう少しエレガントにまとめることはできないのだろうか？オイラーの公式を使って試みてみる。

$$
e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \tag{30}
$$

i は虚数単位，ω も t も実数である。これを使うと，

$$
\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \tag{31}
$$

となる。これを使ってフーリエ級数を書き直すと，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\} &(32)\\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\frac{e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{in\omega t}-e^{-in\omega t}}{2i}\right\} &(33)\\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n}{2}(e^{in\omega t}+e^{-in\omega t}) - \frac{ib_n}{2}(e^{in\omega t}-e^{-in\omega t})\right\} &(34)\\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-in\omega t}\right\} &(35)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{36}$$

となる c_n を導入する。とすると $f(t)$ は以下のようにスッキリと表現できる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{37}$$

これを複素フーリエ級数と言う。$\sin(n\omega t)$ や $\cos(n\omega t)$ の代わりに，$e^{in\omega t}$ という関数を成分用の関数として用意し，その重み（大きさ，強さ）が c_n となる。

c_n を $f(t)$ から求める計算は下記のようになる。a_n，b_n も再掲する。$\omega = \frac{2\pi}{T}$ である。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{38}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{39}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \tag{40}$$

$f(t)$ だけが与えられた状態から，上記を計算することで各成分（$e^{in\omega}$）の強さ c_n が求められることは分るが，そもそも，上記の計算そのものはどうやってやるのだろうか？と考えている学生もいるかもしれない。計算機でそれを実行するためのアルゴリズムは実は存在するが，そこまでは深入りしない。

3 フーリエ変換

フーリエ級数で展開する，あるいは，複素フーリエ級数で展開する，いずれの場合においても周期 T の周期的な波形であることが必要条件であった。では，周期波形でなければ $e^{in\omega t}$ のような成分の重みづけ和という形で表現することは出来ないのだろうか？

少し頭を柔軟に考えてみる。周期が 1 秒の波，周期が 1 分の波，周期が 1 時間の波，，，，周期が 1 年の波，周期が 1 世紀の波。周期というのはその長さに制限は無い。周期 50 億年の波，というのも十分考えることができる。しかし 50 億年前，というのは実は地球が存在していない。この 50 億年を周期として持つ波，というのはそもそも周期を持っている，と考えるべきなのだろうか？周期 T が無限長となった波，なんてのを考えれば，それはそもそも周期的な波ではない，ということでは？と突っ込みを入れたくなる。

結局のところ，

$$\text{非周期的な波形} = \text{周期 } T \text{ が無限長となった波形} \tag{41}$$

と解釈することができる。$T = \infty$ としてフーリエ級数展開すれば，それが非周期波形の各成分の強さを出すことになってくる。

さて，ここでもう一度，周期 T に対する，周波数 f や角周波数 ω を考える。

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{42}$$

フーリエ級数展開は，ω, 2ω, 3ω, ..., $n\omega$ の各成分（角周波数成分）の強さを求めることが目的であった（ステップ幅が ω そのもの）。今 $T \to \infty$ となると，$\omega \to 0$ に近づき，その結果，ステップ幅が非常に小さくなる。周期波形を対象とすれば，基本音，2 倍音，3 倍音，4 倍音，だけを考えればよかったが，非周期波形を対象にすると，基本音の角周波数が 0 に近づき，その 2 倍，3 倍，... を考える，というのは，（角）周波数軸上の全ての点について成分を考える必要がある，ということになる。周期波形の場合は（角）周波数軸上で，離散的に成分を考えればよかったが，非周期波形の場合は，そうではなくなってくる，ということである。$n\omega = n\frac{2\pi}{T}$ に対する強さ，を考えるのではなく，任意の（全ての）角周波数値 ω に対してその強さを考える，ということである。

数式表現では以下のようになる。任意の波形 $f(t)$ を，$e^{i\omega t}$ の重み付け和で表現しようというものである。この時，$e^{in\omega_0 t}(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$，基本角周波数) に対する重み付け和ではなく，$e^{i\omega t}$ に対する重み付け和であることは本質的である。なお参考に c_n の計算式も再掲する。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \left(c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{43}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \left(f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{44}$$

周期 T の周期波形の時は積分範囲が一周期分であったが，非周期波形（任意の波形）だと，$t = -\infty \sim \infty$ が積分範囲となっている点にも注意。ある角周波数 ω の成分の強さを計算する場合（**式 (43)**），地球が生まれる前から，地球が滅んだ後までの積分が必要になってくる，ということである。周期が無限長なのだから，物理的には考えられない演算が要求されても，致し方ない。

式 (43)，**式 (44)** が世に有名なフーリエ変換式，フーリエ逆変換式である。

4 短時間フーリエ変換

式 (43) に対して，「地球が生まれる前から，地球が滅んだ後までも」積分すると述べた。ある人の発声を音響分析するのに，なんでこんな積分が必要になるのか？と考えることはないだろうか？そもそも，音声というのは時々刻々と変わっていくものであり，その音声の開始から最後まで積分していたら，「ある時刻付近の」音声の特徴なんてものは原理的に分析できず，分析結果として得られるのは，音声の開始から終了までの時間幅における平均的な特性になってしまう。少なくとも **式 (43)** をそのまま使えば，「時間 t に関する全積分なので」左辺には時刻 t という変数は残ることができず，時間平均のような特性が左辺として現れることになる。

この問題を解決する常套手段が短時間フーリエ解析である。地球が生まれる前から，地球が滅んだ後まで積分しているのだが，ある時刻付近の音声の特徴のみが計算結果として得られる。

正数 d に対して関数 $w(t)$ を考える，時刻 0 付近では 1.0，それ以外では 0.0 となる。

$$w(t) = \begin{cases} 1.0 & (-d \leq t \leq d) \\ 0.0 & (t < -d, d < t) \end{cases} \tag{45}$$

これに対して $w(t-t_0)$ は，時刻 $t = t_0$ 付近で 1.0，それ以外では 0.0 となる関数となる（窓関数と呼ばれる）。さて，$f(t)$ に $w(t-t_0)$ を掛けた $f(t)w(t-t_0)$ をフーリエ変換することを考える。こうすると，「地球が生まれる前から，地球が滅んだ後までも」積分しても，積分対象が時刻 $t = t_0$ 付近以外では 0 となるため，結局 $t = t_0$ 付近での分析結果となる。

しかしこの場合，得られるフーリエ変換は，$f(t)$ のフーリエ変換ではなく，$f(t)w(t-t_0)$ のフーリエ変換である。この掛け算項はどういう副作用をもたらすのだろうか？

ある角周波数 ω_0 のサイン波 $\sin(\omega_0 t)$ を普通にフーリエ変換すれば，$\omega = \omega_0$ の部分にだけエネルギーが存在する，パルス状のスペクトルが得られる。しかし，$\sin(\omega_0 t)w(t-t_0)$ をフーリエ変換すると，パルスが幅広の棒状になり，かつ，パルスの周りに波状のスペクトルが観測されるようになる。これらの現象をスペクトル漏れという。窓関数 $w(t-t_0)$ をかけることで，スペクトルが漏れてくる，ということである。窓幅が狭ければ狭いほど，漏れの様子は大きくなる。窓幅が長ければ長いほど（窓を掛けないのは，無限長の窓を掛けることに等しい），漏れの様子は軽減される。

実効的な積分区間を狭めて，なるべく狭い範囲での音声区間を分析しようとすれば，狭い窓幅の窓関数をかけることになるが，こうすると漏れが大きくなる（周波数軸上での分解能が下る）。漏れを小さくするには，窓関数の幅を広くとる必要があるが，こうすると時間平均化の効果が大きくなってしまう（時間軸上での分解能が下る）。結局のところ，周波数分解能と時間分解能の両方を上げることは原理的に不可能であり，どちらかを犠牲にしてどちらかを上げることが必要になってくる。窓幅を大きくとり，周波数分解能を高めた場合の分析を狭帯域（狭い周波数帯域）分析と呼び，窓幅を狭くとり，周波数分解能を下げた（時間分解能を上げた）場合の分析を広帯域分析と呼ぶ。両者のスペクトルを見ると，基本周波数の見え方が異なってくる点に注意。

5　その他

短時間フーリエ変換は，波形の局所的な区間を分析することが目的であったが，それを実現するためにスペクトル漏れという副作用が生じた。このようなジレンマは根本的には何が原因なのだろう？フーリエ変換の場合，$\sin(\omega t)$，$\cos(\omega t)$，$e^{i\omega t}$ を「要素波形」として，これらの重みづけ和として $f(t)$ を表現することが基本である。これらの波形はどれも 1) 周期的，かつ，2) 地球が誕生する前から，地球が滅亡した後までも振動し続ける波形である。この 2) の特性を有する波形を通して，$f(t)$ の局所的な部位を分析しようとすることに無理がある。であれば「要素波形」そのものが局所的な波形，つまり，$-d < t < d$ 以外では 0 となるような波形群を用意し，それらを上手に使って，それらの重み付け和として任意の波形を表現できれば，局所的な波形の分析も無理なく行なえるように思われる。このような観点から，局所的な波形を「要素波形」として用意して任意波形の分解・合成を行なうのがウェーブレット解析である。興味のある学生は web などで探ってみると良いだろう。