

様々なカオスとフラクタル

姫路工業大学環境人間学部 二之宮 弘

決定論的力学系に見られる不規則で複雑な構造をもつ軌道を”カオス”と呼んでいます。ここでは、代表的なカオスの現象とそれに関連したフラクタルについて簡単に述べていきます。

1 カオスとは

カオスの定義は、数学・物理学・工学の研究者によってそれぞれの立場から与えられています。これらは、ほぼ同じ内容のことを表現していると考えられています。すべての定義に共通した考え方である、

- 簡単な規則に支配された、不規則な振動
- 自己相似な構造により、フラクタル次元をもつ現象

を、カオスと呼ぶことにします。

「初期値を与えると必然的に未来での振る舞いが与えられる」ことを、決定論と呼んでいます。しかし、この決定論的な規則に非線形性を組み合わせると、初期値がわずかに異なっただけでも、予想できないような不規則現象が引き起こされます。これがカオスです。カオスは、数値計算による天気予測の研究から発見されました。簡単な決定論的方程式で数値計算を行ったところ、初期値のわずかな違いからまったく予測もつかない結果が生じてしまいました。これは、初期値がわずかに異なっていると結果もわずかにしか違わない、という従来の予想とは異なっています。この不思議な研究結果から、カオスの研究が始まりました。

また、現象がカオスによるものかどうかを判定する方法が必要です。このため、フラクタルと呼ばれる考え方と、フラクタル次元という指数を使用します。フラクタルがカオス

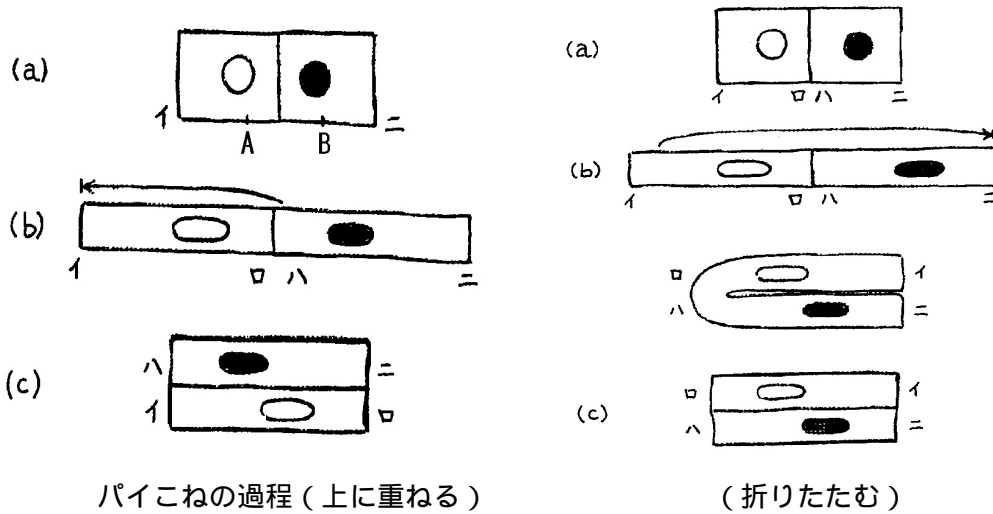
の逆プロセスであることがわかっていますので、注目している現象が非整数のフラクタル次元をもてば、カオスによって引き起こされた現象であると考えられます。

これは、雑音などのように解明できなかった不規則な現象を、カオスという新しい考え方を使うと、不規則な中にも構造をもちフラクタル次元によって定量化できる部分があることを示しています。

まず、簡単にカオスの生成について説明し、次にフラクタルについての説明を行い、最後にカオスの発生と応用について述べます。

1.1 カオスの生成

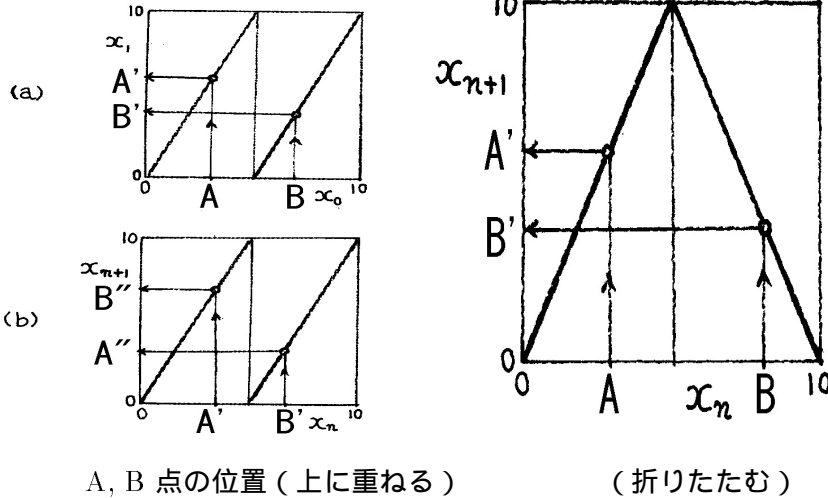
カオスを簡単に説明するために、パイこね変換を使います。料理やお菓子におけるパイを作る過程を考えてみましょう。まず、粉から生地を作り、それを引き延ばして、たたみこみ、さらに引き延ばして、たたむ操作を繰り返しながら、生地を作っていきます。引き延ばしとたたみこむ手順は、パイだけでなく麺類の生地を作る時と同じです。



図のように、生地をたたむ際、引き延ばした生地の中を切って重ねる方法と、折りたたんで重ねる方法があります。繰り返したたみこむことによって、生地がよく混ざっていきます。図の A 点と B 点が混ざっていく様子を考えてみましょう。A, B の位置を横軸に、たたみこまれた後の位置を縦軸に示します。

図の中の斜め線が、たたみこむ操作を示しています。繰り返し折りたたまれる操作は、縦軸の値が次のステップでは横軸の値となり、それが繰り返されることです。ある状態の図から、次の状態の図へ移ることを、写像と呼んでいます。重ね合わせる写像、折りたた

み写像のいずれでも、カオスが発生します。



A, B 点の位置 (上に重ねる)

(折りたたむ)

1.2 カオスの例

最も簡単なカオスが発生する系としてロジスティック写像を考えます。まず、生物の個体数の増減を考えましょう。生物の親の数を $u (\neq 0)$ とします。生まれる子の数は親の数に比例すると仮定します。すると個体数の増加を表す微分方程式は、

$$\frac{du}{dt} = \gamma u$$

と表されます。これは解析的に解けて、

$$u = u_0 e^{\gamma t}$$

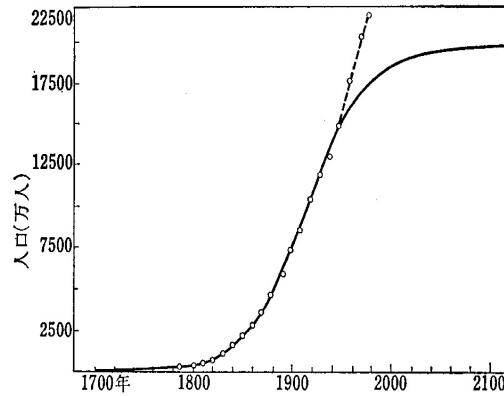
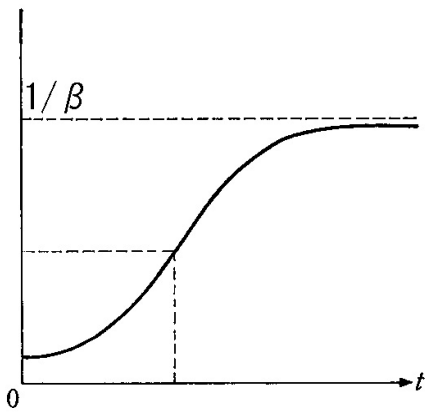
となります。時間とともに個体数が爆発的に単調増加することを表しています。実際には、環境によって個体数の増加が妨げられたり、死亡による減少などがありますから、このように単調増加することはありません。そこで、生物が生存するための領域に制限があるという条件を入れます。各個体あたりの領域の広さは、全体の個体数により制限され、個体数の増加は抑えられると考えます。これを

$$\frac{du}{dt} = \gamma u \cdot (1 - \beta u)$$

と表します。この微分方程式も解析的に解けて

$$u(t) = \frac{\eta \gamma e^{\gamma t}}{1 + \gamma \beta \eta e^{\gamma t}}$$

となります。最初急激に増加しても、最大値 $1/\beta$ へ収束することを示しています。



アメリカの人口増加の予測（パールとリードによる）

$$u(t) = \eta\gamma e^{\gamma t} / (1 + \gamma\beta\eta e^{\gamma t})$$

この微分方程式で表された現象は、初期値を与えると任意の時間 t での $u(t)$ の値を正確に計算することができます。また、初期値がわずかに異なっても、 $u(t)$ の値のずれも正確に予測することができます。これは、カオスではありません。

次に、この微分方程式を差分化してみましょう。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta t} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = \gamma u_i (1 - \beta u_i) \\ u_{i+1} &= u_i + \gamma u_i (1 - \beta u_i) \Delta t \\ &= (1 + \gamma \Delta t) u_i \left(1 - \frac{\gamma \Delta t}{1 + \gamma \Delta t} \beta u_i \right) \end{aligned}$$

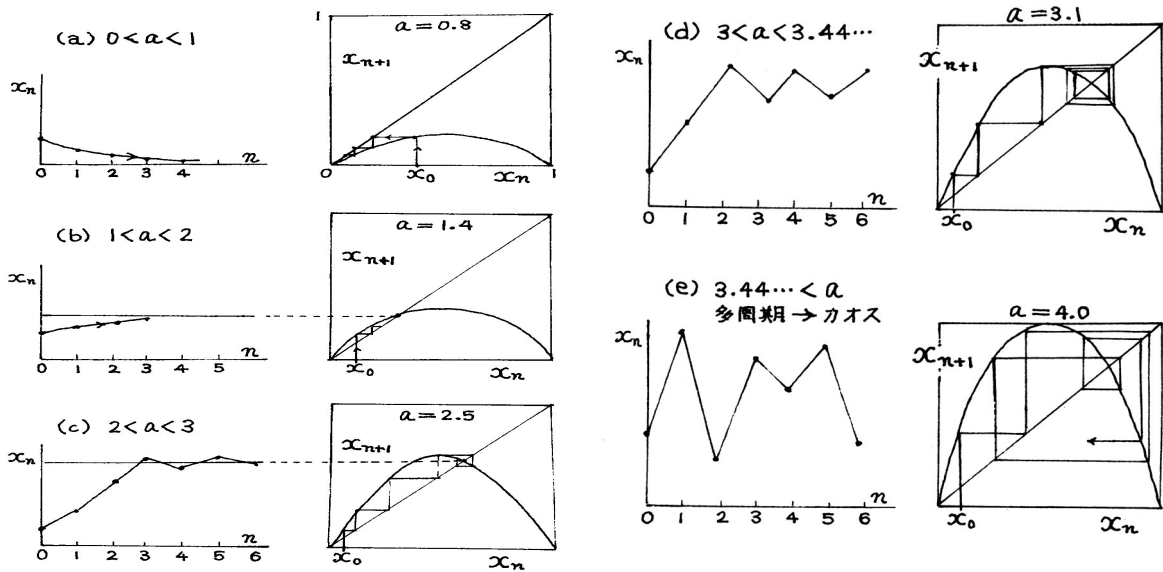
ここで $x_i = \gamma \Delta t / (1 + \gamma \Delta t) \beta u_i$, $\alpha = 1 + \gamma \Delta t$ とおくと、

$$x_{i+1} = \alpha x_i (1 - x_i)$$

$$t_n = t_0 + n \Delta t$$

と表すことができます。これが ロジスティック方程式 です。 u の最大値は、 $1/\beta$ なので、 $0 < x \leq 1$ となります。自然界での生物個体数の増減は離散的に変化しますので、差分方程式の方が自然をよりよくモデル化していると言えます。

差分方程式は簡単な時間ステップで計算できますので、適当な初期値 ($0 < x_0 < 1$) で α の値を ($0 < \alpha < 4$) に設定して、計算を行います。結果を図にまとめてみます。



ロジスティック方程式の計算結果

i	$0 < \alpha \leq 1$	安定な値へ単調減少
ii	$1 < \alpha \leq 2$	安定な値へ単調増加
iii	$2 < \alpha \leq 3$	安定な値へ減衰振動
vi	$3 < \alpha \leq 1 + \sqrt{6}$	安定な2つの値の間を振動
v	$1 + \sqrt{6} < \alpha < 4$	周期振動、またはランダムな振動

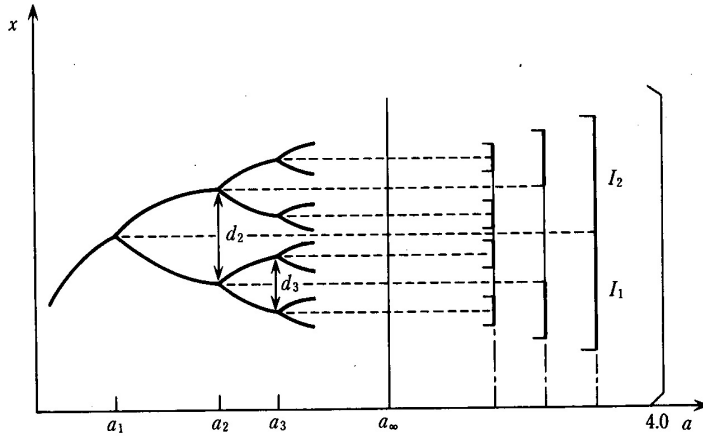
微分方程式で得られた解析的な結果とは異なり、予想もつかない結果が得られてしまいました。問題にした差分方程式は簡単ですし、時間 t_n を与えると x_n の値を求めることはできますので、決定論的な結果といえます。しかし、解の振る舞いはまったく不可思議な結果となります。これが、カオスです。パラメータ α の変化によって、定常状態から、周期状態そして不規則な状態（カオス）へと変化していきます。このような分岐と不安定振動がカオスの特徴です。

このロジスティック写像は、定常状態から、分岐状態、カオス状態へと変化する様子を明白に見ることが出来ます。特に、倍々と分岐していくとき、分岐臨界点での α_n の値の比と、分岐点での周期的な $|x_j - x_{j+1}| = d_n$ の値の比は、一般的に定数となることが知られています。この関係も、カオスであることを同定するために利用することができます。

$$(\alpha_n - \alpha_{n-1}) / (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \approx 4.6692 \dots$$

$$d_n / d_{n+1} \approx 2.5029 \dots$$

この2つの値をファイゲンバウム定数と呼びます。



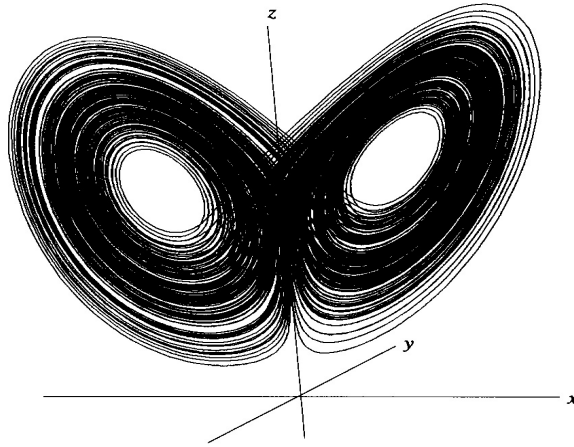
分岐現象とファイゲンバウム定数

1.3 ストレンジアトラクタ

カオスの発見のきっかけとなった研究を紹介します。気象学者のローレンツは、天気予報が原理的に可能であるかどうかを調べるため、熱対流を記述する流体方程式を考えました。この方程式は、原理的なものとして考えるために大胆なモデル化を行いました。気象現象を簡略化し、3変数の常微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -P_r x + P_r y \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

として表現しました。3つのパラメータ P_r , r , b を変化させながら、方程式の解の振る舞いを数値計算によって計算しようと試みています。2つのパラメータを $P_r = 10$, $b = 8/3$ と固定し、 r を変化させたときの数値実験を行ったところ、図のような不可思議なアトラクタとなることが発見されました。 $r < 24.74$ では、安定な解として定常解となり、 $r > 24.74$ では軌道は不規則なものとなります。初期条件をわずかに変えると、まったく予測できない解へと変化し、カオス的なアトラクタに引き込まれていくことが観察されます。最初に観察されたときあまりにも奇妙な振る舞いであったことから、ストレンジアトラクタ と呼ばれています。



ローレンツアトラクタの3次元表示

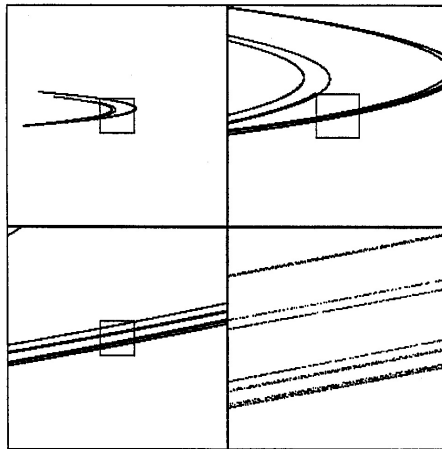
1.4 エノンアトラクタ

ローレンツの考えた3変数の連続時間の微分方程式から、もっとも簡単な系として離散時間の写像関係を使い2次元で考えようとしたのがエノンの写像です。

$$X_{k+1} = 1 + Y_k - \alpha X_k^2$$

$$Y_{k+1} = \beta X_k$$

α は非線形性を示すパラメータ、 β は散逸の強さを示すパラメータです。いま、 $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$ として、任意の初期値から写像を求めると、図のようなエノンのアトラクタが求まります。このアトラクタのスケールを変えて見ると、図のように自己相似的な写像が得られ、フラクタルであることを示しています。またこのアトラクタもストレンジアトラクタです。



エノンアトラクタ

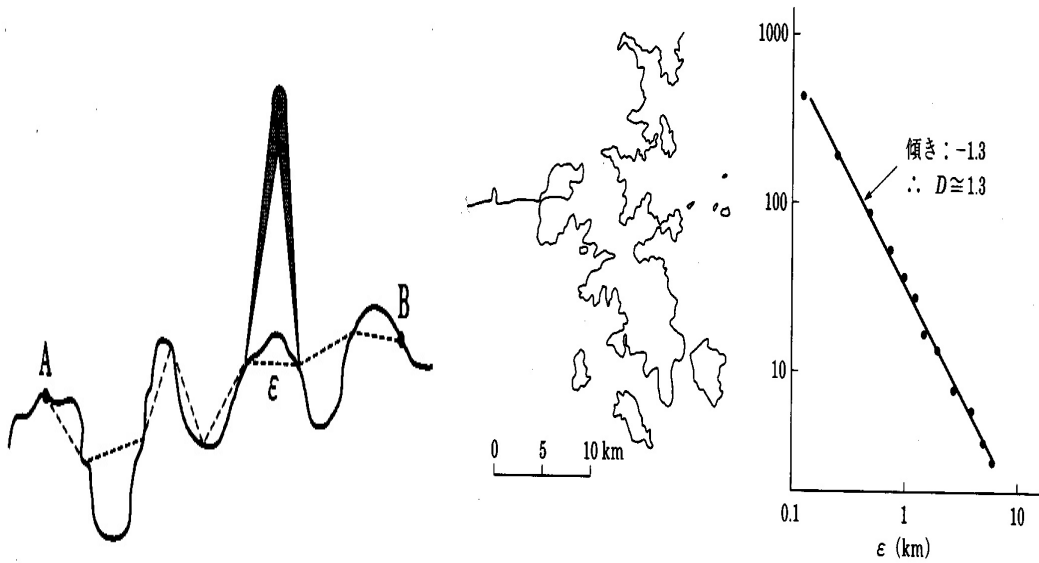
2 フラクタルとは

フラクタルはマンデルブロによって考え出された考え方で、図形の乱雑さを特徴づけるパラメータを与えるものです。海岸線の形を例にして考えてみましょう。海岸線の長さを測るには、適当なものさしがあれば簡単に測れるはずですが、例えば 100m のものさしで海岸線の長さを測ることを考えます。海岸線が 100m のものさしを使って 10 回分の長さであったとすると、海岸線の長さは、 $100\text{m} \times 10 \text{回} = 1\text{km}$ となります。しかしよく考えるとこの方法では 100m 以内の海岸線の凹凸による影響を測ることはできません。10m のものさしで再び測ってみると、海岸線の凹凸のため、100m のものさしで測った距離より長くなるでしょう。海岸線が直線の場合だけ、100m のものさしと、10m のものさしで測った長さが一致します。海岸線は複雑な曲線ですから、基準となるものさしの長さが長くなると海岸線の長さは短く、ものさしの長さが短くなると海岸線の長さは長くなります。ものさしの長さは、1km, 1m, 1cm, 1mm, $1\mu\text{m}$, ... といくらでも短くすることが出来ます。つまりものさしの基準の長さが短くなると、海岸線の長さは無限に長くなることとなります。現実的には、ものさしの長さは有限ですので、正確な海岸線の長さは測れないこととなります。しかし、自然にできた海岸線では、ものさしの長さとそのものさしで測られた長さとの間には一般的な関係があることが最近になってわかってきました。そこで海岸線のような複雑な形状を数値化して表現する方法として、フラクタルという考え方が導入されました。

海岸線の長さだけをとっても、海岸線の形の特徴が含まれていることを示してみよう。ものさしの長さを r このものさしで測った回数を $N(r)$ とすると、海岸線のような図形では、

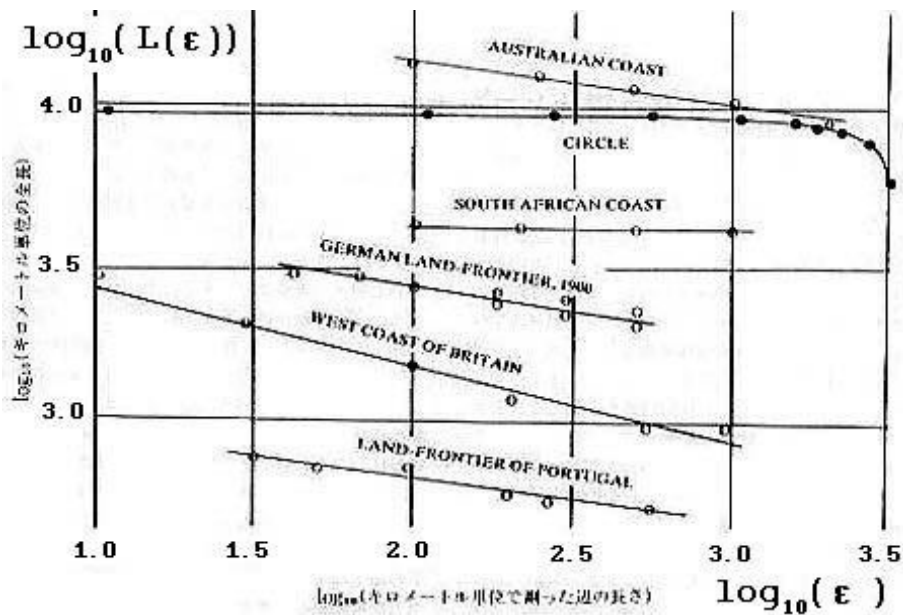
$$N(r) \propto r^D$$

となることが知られています。この D を フラクタル次元 と呼びます。 D が 非整数 の値をとるとき、この図形を フラクタル図形 または フラクタル であると言います。フラクタル次元が大きいと図形は複雑で、小さいと簡単であると言えます。



海岸線の長さの計測

r と $N(r)$ の関係¹⁾



海岸線のフラクタル次元²⁾

もし図形が、直線のような場合には、基準となるものさしを変えても長さは不変です。私たちがいままで図形・幾何として習ってきた図形は、直線、円弧、四角などのように単純な図形で、いずれもフラクタルではありません。自然界で直線や円弧を見いだすことはめったにありませんし、自然はフラクタルでいっぱいであると言えます。代表的なフラクタル図形をいくつか示しておきます。

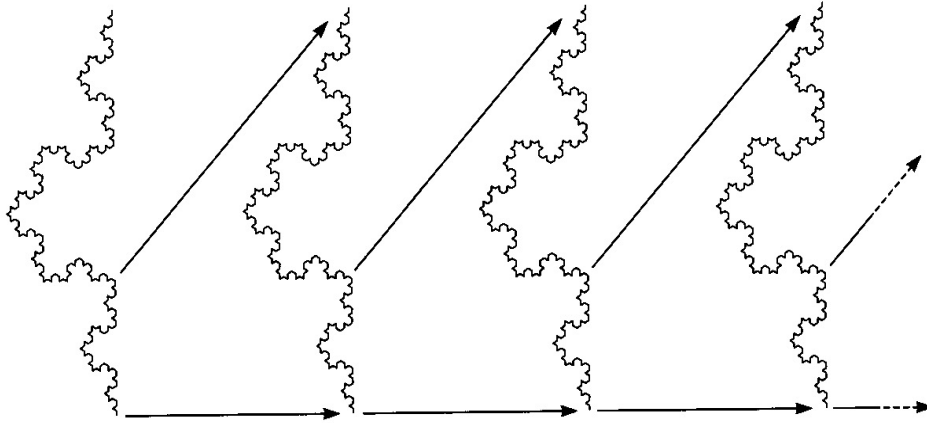


フラクタル図形

フラクタルは、図形や現象の複雑さを定量化するために導入された考え方です。定量化するための数値がフラクタル次元です。そのため、いままで解析することが不可能であろうと考えられていた現象でも、フラクタル次元が同じであることから、同じ原因でその現象が生じていると類推できることがわかってきました。例えば、凝集による結晶成長で生じる2次元パターンが、フラクタル理論で作成されたDLA (Diffusion-limited aggregation: 拡散律速凝集) の生成過程と同じであることが証明され、フラクタル次元も一致しています。

2.1 フラクタルとカオスの関係

フラクタルの特徴に、自己相似があります。自己相似とは、図形の一部が全体の縮小図形になっていることです。入れ子の構造とも言われます。



自己相似図形

パイこね変換で述べたように、引き延ばしと折りたたみの繰り返しによってカオスが生成されます。つまり、最初の図形が自分自身の中へ繰り返し写像されることとなります。折りたたまれていく図形の全体の大きさは変わりませんから、写像は縮小写像となります。つまり、カオスはもともと自己相似の性質をもっていることとなります。

カオスが自己相似的であり、フラクタルであるのはこのためです。自己相似性をもつ図形は、フラクタルであり、当然フラクタル次元を持っていることとなります。カオスの生成過程が異なるとフラクタル次元も異なりますので、自然を構成していく過程の違いが数値として現れますから、フラクタル次元の値は重要なパラメータとなります。

カオスとフラクタルの関係については、山口昌哉著「カオスとフラクタル」講談社ブルーバックス (B652) に詳しく説明されています。

3 カオスの発生：コンピュータシミュレーション

物理や工学では、一般的に微分方程式の形で現象を表現します。これは初期値や積分境界条件に任意性を残すためです。逆に、実際に計算し解を求めるためには、解析的な解を求めるにしても、数値的な解を求めるにしても、初期条件や境界条件を与える必要があります。カオスやフラクタルでも、時間に依存した微分方程式または差分方程式で表現されています。

数学の微分方程式の授業で習うような方程式は、解析的な解を求める問題ばかりです。

しかし、カオスを発生する方程式は非線形で時間発展方程式であるため、一般的な解析解を求めることが出来ません。また解析的な解とは、初等関数 \sin, \cos などの周期性をもった解か定常解ですからカオス状態を表現できるものではありません。

カオスのような非線形の方程式の解は、コンピュータを使って数値的に近似解を求めなければなりません。ロジスティック方程式のような簡単な系の場合には、電卓や手計算でもカオスを発生させることができます。ここではパソコンで計算させることを目的に、数値計算の簡単な方法を解説しておきます。

3.1 コンピュータによる計算

時間発展微分方程式をコンピュータの数値計算を使って解くためのいちばん簡単な方法は、微分を差分に置き換えて近似的な解を求めることです。微分方程式を積分して解を求めるのではなく、微分方程式を微小な時間間隔で離散化し、差分方程式とします。そして、時間間隔ごとにその差分方程式を加算していく方法です。微小な間隔で加算することは、近似的には積分と同じで、数値積分の方法として使われています。

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

で表される初期値問題を考えます。時間 t を初期値 t_0 から時間間隔 Δt に刻み、

$$t_n = t_0 + n\Delta t \quad x_n = x(t_n)$$

として、 x_n より x_{n+1} を

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)\Delta t$$

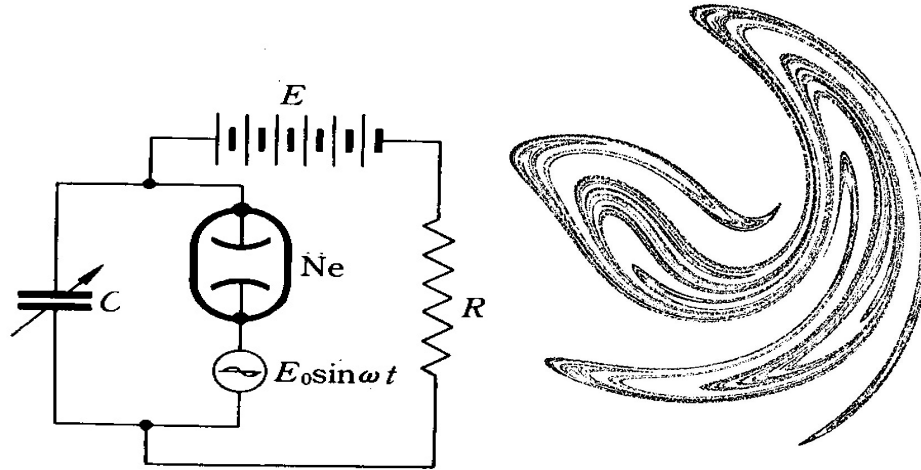
として求めます。 Δt が十分小さいと誤差は小さくなると考えられますから、簡易的に利用される方法です。

4 カオスの発生：実験

カオスを工学的に応用するためには、電子回路によりIC化することが必要とされます。デジタル回路によるカオスは、コンピュータのソフトウェアでシミュレーションすることにより簡単に実現できますので、コンピュータプログラムとして紹介します。また、アナログ回路によるカオスは、現象を目で見たり・音として聴いたりすることが簡単にできますので、いくつか例示します。また、化学振動現象や物理実験の例も示したいと思っております。

4.1 ファン・デル・ポールの実験

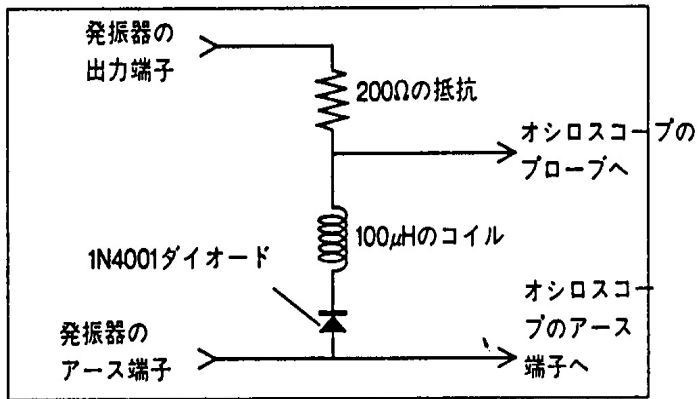
非線形要素を持つ共振回路に、外部から強制振動を与えると、カオスが生じることはファン・デル・ポールらの実験によって観察されていたとされています。日本でも京都大学の上田博士によりジャパニーズアトラクタと呼ばれるカオス現象が発見されています。ここでは、ダフィン方程式と呼ばれる、非線形共振回路によるカオスを実験してみます。



(i) ファン・デル・ポールの実験回路

(ii) ジャパニーズアトラクタ

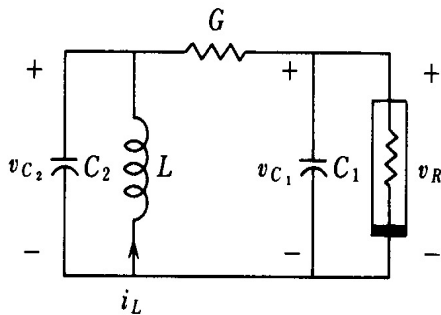
図に示すように、抵抗・コイル・ダイオードと強制振動を与える発振器と観察用のオシロスコープが必要です。ダイオードは、正方向の電圧には電流を流し、負電圧では電流を流さないという非線形性をもっていますし、負電圧では電流を流しませんので、コンデンサとして作用します。このため、コイルとダイオードの非線形共振回路ができあがりません。この回路に共振周波数に近い強制振動を入れます。加える信号の電圧振幅によってダイオードの非線形性が現れますから、周波数を適当に変化させながら、発振器の出力電圧をゆっくり増加させると、倍周期，3倍周期，不規則振動などを観察することができます。この変化していく様は、典型的なカオス現象です。



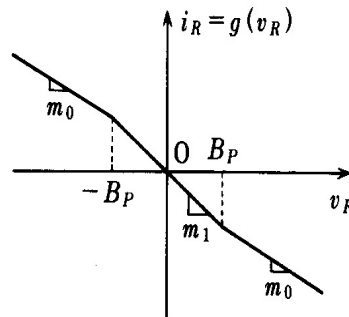
ダフィン方程式の電子回路

4.2 微分方程式を表現する回路

自励発振回路で、カオス的な発振を生じるものを図に示します。



ダブルスクロール発生回路



連続区分特性³⁾

非線形性を示す負性抵抗と、2個のコンデンサ、1個のコイル、1個の抵抗から成る回路です。非線形抵抗は、図に示すような連続区分特性を持っています。この区分特性によ

り折りたたみが行われます。この電子回路を表現する微分方程式は、

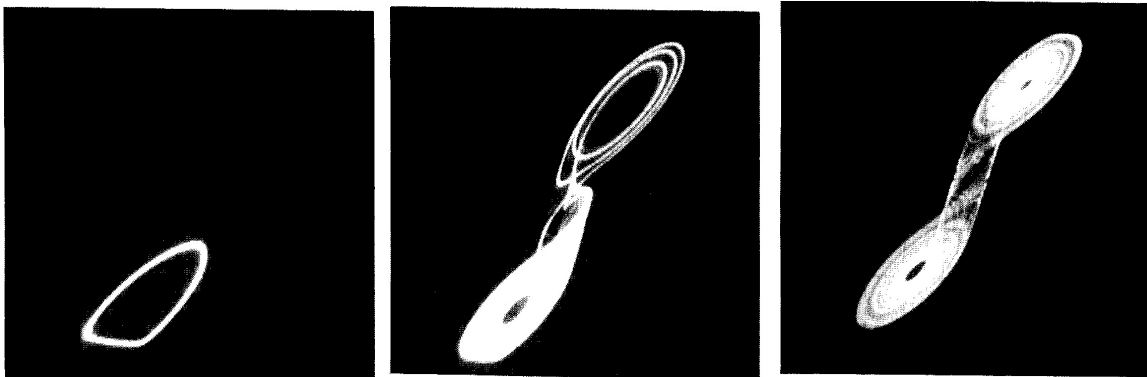
$$C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = G(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1})$$

$$C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} = G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L$$

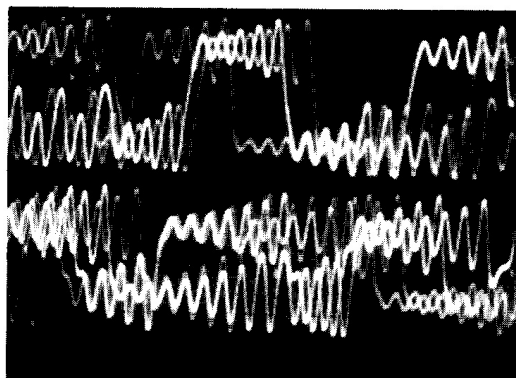
$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C_2}$$

$$g(v_{C_1}) = m_0 v_{C_1} + \frac{1}{2}(m_1 - m_0) |v_{C_1} + B_P| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1) |v_{C_1} - B_P|$$

となります。ここで、 v_{C_1} 、 v_{C_2} は、コンデンサの両端の電圧、 i_L はコイル L に流れる電流です。



(i) 1 周期 (ii) ダブルスクロール (周期) (iii) ダブルスクロール (非周期)



時系列信号

この実験については、「カオス - カオス理論の基礎と応用 - 」サイエンス社、合原 一幸 編著、で詳しく述べられています。

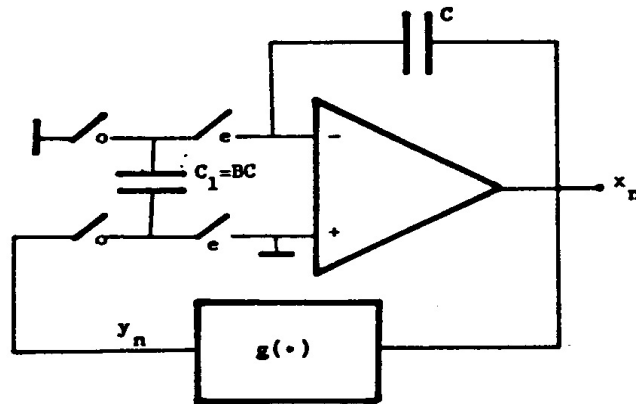
4.3 時間ステップを表現する回路

微分方程式で表現できる回路よりもっと簡単なカオス系は、時間発展系の写像関係を実現する回路です。離散的な時間発展を、時間ステップで動作する回路として実現します。

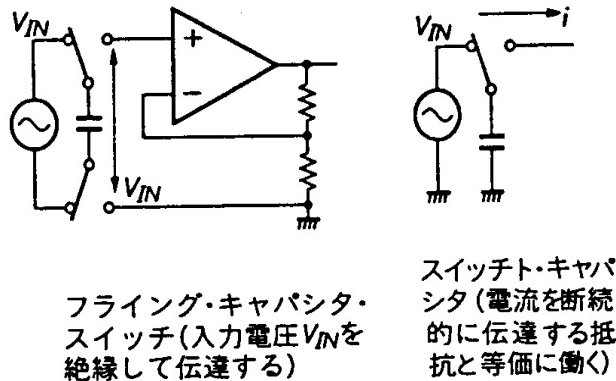
最も簡単なロジスティック写像を考えましょう。

$$x_{j+1} = \alpha x_j(1 - x_j)$$

この方程式を実現するには、時間ステップ j の写像値 x_j を記憶する回路、 $1 - x_j$ の計算を行う回路、 x_j と $(1 - x_j)$ をかけ算する回路、 $x_j(1 - x_j)$ の値を α 倍増幅（可変）する回路、計算した結果 x_{j+1} を記憶する回路が、それぞれ必要です。回路素子は、アナログ計算機として使われている回路ですので、演算増幅器（オペアンプ）と抵抗・コンデンサなどで実現することが出来ます。時間ステップにより x_j, x_{j+1} を記憶したり、次のステップに代入する回路は、電圧を記憶するためのコンデンサと、代入する値を入れ換えるスイッチ回路で実現します。これはスイッチド・キャパシタ回路と呼ばれる回路です。



時間ステップによるカオスを発生する回路⁴⁾



スイッチドキャパシタ回路

4.4 化学反応系によるカオスの発生

ベルーソフ-ジャボチンスキー反応は、マロン酸の酸化還元反応により、時間振動や非線形振動を生じる系としてよく知られた化学反応です。不可逆過程の熱力学から、熱平衡近傍における反応系では、振動現象は起きないとされています。しかし、熱平衡状態から遠く離れた非線形領域では、振動現象が生じても熱力学の第2法則に矛盾しません。これは化学エネルギーを散逸することによって、化学振動が生じていることで説明することができます。その振動は、定常的・周期的・非周期的な変動となり、カオスであることが調べられています。

4.5 物理におけるカオスの実験

物理の教材として、演示実験ができると思われるいくつかのカオスの実験を考えてみました。詳細については付録をご覧ください。この公開講座の休憩時間などに実際に体験していただければ幸いです。

5 フラクタルの発生

自然に多くみられるフラクタル構造の成因について、色々なことがわかってきています。現在までに理解されているフラクタル構造が生成される原因には3つのメカニズムがあるとされています。

- 不可逆でランダムな成長過程によるもの (凝集体, 結晶成長)
- 非線形の折りたたみ効果によるもの (カオス)
- 平衡系の相転移における臨界現象に基づくもの (相転移, 臨界現象)

それぞれの観点から多くの専門的な研究が行われていますが、まだ多くの未知の問題が残されています。

5.1 コンピュータによるシミュレーション

フラクタル図形は、自然界のいたるところで見ることが出来ますが、数学的に厳密な自己相似図形として、マンデルブロ集合やジュリア集合と呼ばれる図形があります。

5.1.1 ジュリア集合

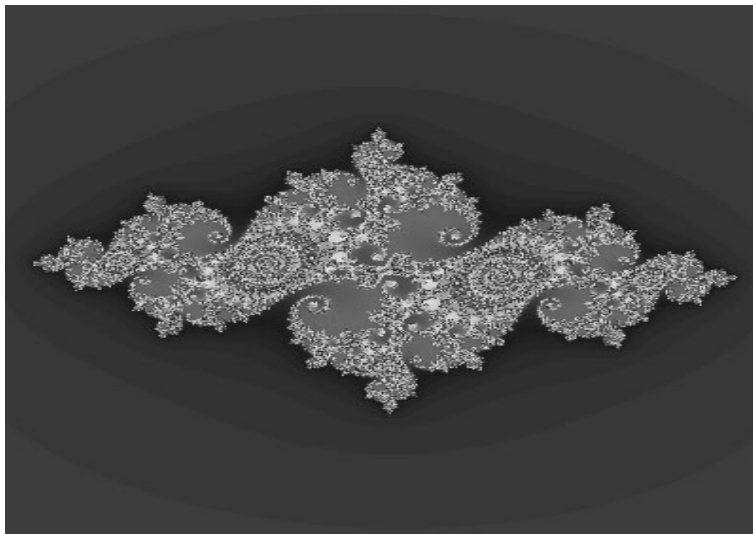
複素変数 z の代数方程式、

$$f(z) = 0$$

をニュートン法と呼ばれる方法で近似計算することを考えます。例えば $f(z) = z^2 + 1$ において

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

を計算し、 z_n が一定値に収束したときの解を見いだす方法です。代数方程式の数値解を求めるためによく用いられる方法です。ところがこの解を見いだすために、初期値の z_0 をどのような値にしたらよいかわかりません。そこでこの z_0 が複素平面内でどのような分布をしているかを表示したものがジュリア集合です。図では、 z_n の値が一定値に収束した回数 n を初期値 z_0 の複素座標へ色分けして表示したものです。中央の黒い部分は、有限回数で収束しなかった場所です。



ジュリア集合

5.1.2 マンデルブロ集合

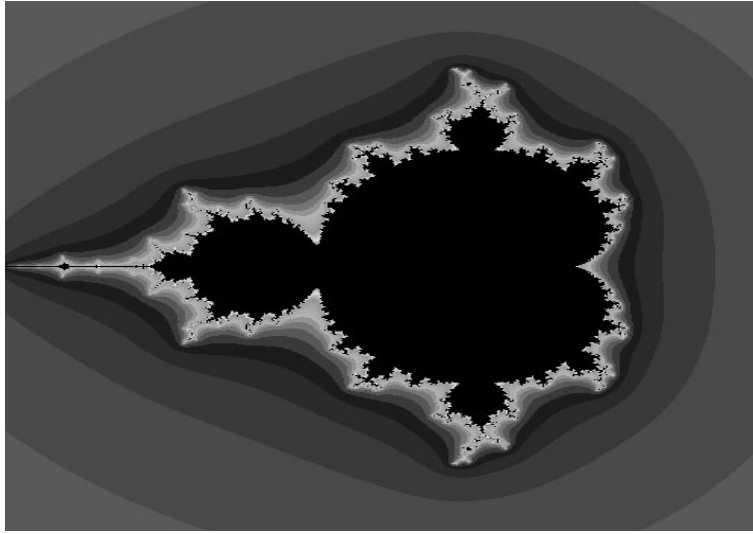
ジュリア集合と同じように、複素平面内の多項式、

$$f_\mu(z) = z^2 + \mu$$

で

$$z_{n+1} = f_\mu(z_n) + \mu$$

を考えると、 μ と z_0 により、 z_n のふるまいを示すことができます。 n が大きくなっても z_n が無限大にならないような μ の値の集合をマンデルブロ集合と呼びます。



マンデルブロ集合

ジュリア集合やマンデルブロ集合は、複素座標を拡大縮小しても、現れる図形の様相がほとんど変わりません。これが自己相似の図形の特徴です。

6 様々なフラクタル

自然には多くのフラクタル現象を見ることが出来ます。それは、自然現象のほとんどが非線形の系であり、自己相似的な構造もっていることを示しています。VTRやポスター、写真集などで、自然現象に現れた様々なフラクタルと、コンピュータによって作り出されたフラクタルをご覧ください。

7 カオスかどうかを判定する

時間とともに変化していく現象を観測し、なんらかの方法で信号として取りだしたものを時系列信号と呼びます。この時系列信号が、周期的な信号であるか、非周期的な信号であるかを解析するために フーリエ解析 が最も良く利用されています。フーリエ解析は、時間とともに変化する信号の周期的な振る舞いを調べる最も基本的な手法です。しかし、なんらかの構造を持つカオス的な信号と、ランダムな信号である白色雑音とをフーリエ解析によって区別することは困難です。

フーリエ解析では、周期的な信号では線スペクトルが現れ、非周期的な信号では連続スペクトルが現れます。白色雑音では、明らかに周波数に依らず一様な連続スペクトルが現れますが、小数自由度から発生したカオスの時系列では、同じように連続スペクトルを持つため、フーリエ解析によってカオスか雑音であるかを明確に判断することは困難です。多次元の解析については、後で述べるポアンカレ断面を調べる方法を使ってその様子を見ることはできますが、定量的にカオスかどうかを判断することはできません。そこで使われるのが、アトラクタのフラクタル次元を決定することによりカオスの特徴づける方法です。

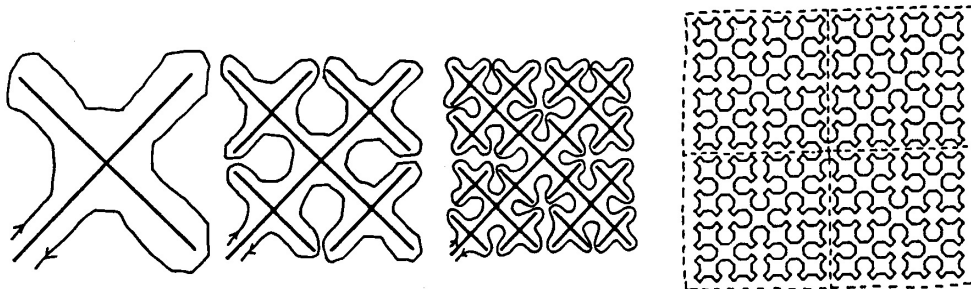
2.1 で述べたように、カオスとフラクタルの関係から、カオスであれば非整数のフラクタル次元をもっています。カオスであるかどうかは、不規則に振動している現象の中から、最も特徴的なパラメータを信号として取り出し、そのフラクタル次元を求めることにより判断することができます。

ここでは、フラクタル次元の説明と、フラクタル次元を求める方法について説明します。

7.1 フラクタル次元

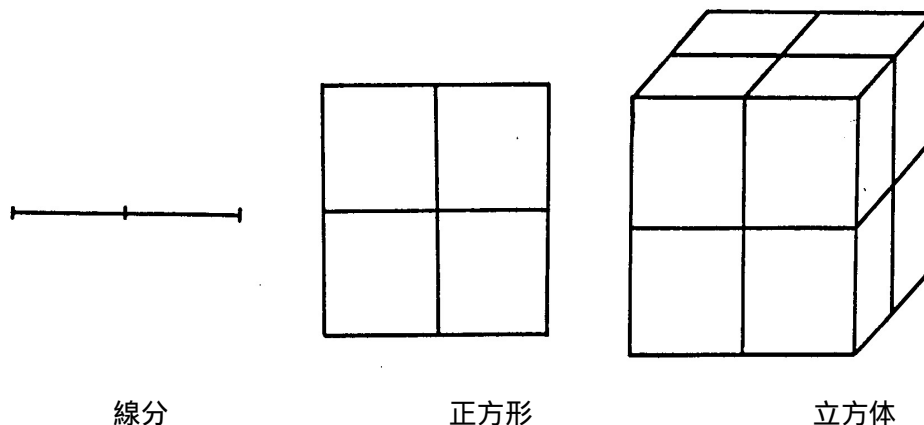
我々がふだん使っている次元という言葉は、点は0次元、直線は1次元、平面は2次元、立体は3次元と、整数を使って表されます。これは経験的次元で、数学的な独立変数の数、自由度と一致します。物理学で質点の運動を扱うときにも、 n 個の粒子からなる系では、座標と運動量を独立変数とみなして $6n$ 次元位相空間中の1個の点の運動として考えます。

しかし、図のように1次元の直線を組み合わせるだけで、2次元を覆いつくすようなペアノ曲線が発見されました。このペアノ曲線は1筆書きによって描けますので、2次元上の1点が1つのパラメータで表現できることになり、図形として1次元なのか2次元なのか決められないようになってしまいました。そこで、導入されたのが相似次元です。



ペアノ曲線

線分，正方形，立方体の次元の相似性について考えてみます。各図形の各辺を2等分すると、線分の長さは元の2個分に、正方形では元の4個分に、立方体では8個分になります。



つまり、 $1/2$ にした図形は元の相似図形で、それぞれ $2^1, 2^2, 2^3$ の個数で全体が構成されていると考えられます。この 1, 2, 3 という数字は、経験的な次元と一致します。一般的には、図形全体が、 $1/\alpha$ に縮小した相似図形 α^D 個によって構成されるなら、この指数 D を相似次元と呼ぶことにします。ペアノ曲線の場合には、全体を $1/2$ にした図形 4 個で元の図形を構成できますので、相似次元は 2 となります。

相似次元の特徴は、 D が整数でなくても良いことです。全体を $1/\alpha$ に縮小した相似図形 β 個で構成される図形ならば、

$$\beta = \alpha^D$$

が成り立ちますので、相似次元 D は、

$$D = \frac{\log \beta}{\log \alpha}$$

となります。

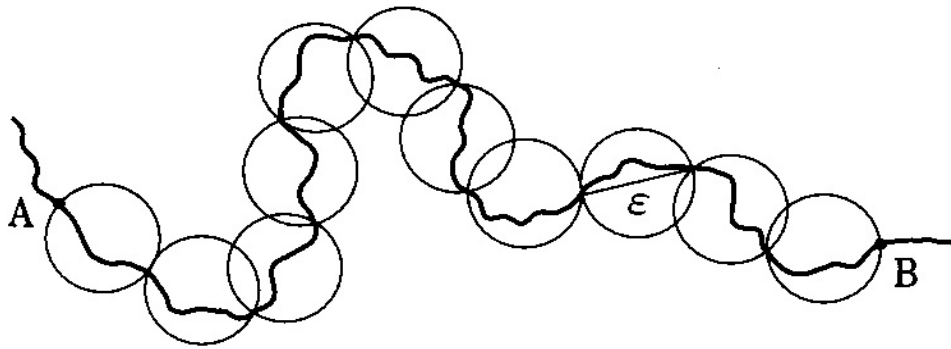
カオスが発生する過程において、繰り返し縮小写像によって全体が構成されますので、カオスの現象を図形とみなして考えると、全体の図形が縮小した相似図形で構成されていることになり、相似次元を求めることができます。しかし、この相似次元の定義は、完全な相似図形に対してのみ適用できますので、もっと任意の図形に対する次元が必要となってきます。これがフラクタル次元です。フラクタル次元を決めるのは色々なやり方がありますが、よく利用されるものを示します。

(1) 被覆次元 :

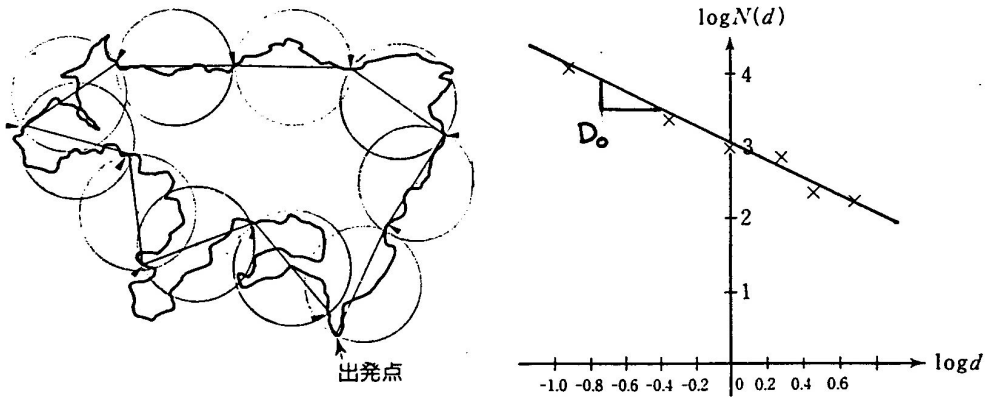
すでに説明しましたように、海岸線のように直線ではないが、複雑に入り組んだ図形の長さを測ることを考えます。測るものさしの長さを r とすると、 r の長さで何回分の長さであるかを数え、それを $N(r)$ とします。 r が小さいほど入り組んだ形状まで測れますので、 $N(r)$ はより多くなります。 r が大きいと複雑に入り組んだ形状を測るのは無理ですので、 $N(r)$ は少なくなります。 r を変えて $N(r)$ を求めると

$$D_0 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log r}$$

を求めることができます。この D_0 を被覆次元と呼びます。被覆法によるフラクタル次元という意味です。一般に、 n 次元空間の図形の被覆次元を求めるのは、1辺の長さが r の n 次元立方体か、半径 r の n 次元球で $N(r)$ を測り、 D_0 を求めればよいことになります。



被覆次元の測定



被覆次元の決定 $\log N(r)$ と $\log r$ の傾きから求める

r の大きさを変えながら $N(r)$ を測り、 $\log r$ に対する $\log N(r)$ の傾きを求めるには、 $\log r$ と $\log N(r)$ の関係が直線となっている必要があります。その直線の傾きが D_0 です。もし図形がフラクタルではない場合には、直線となりません。そのため、 D_0 を求めることができませんから、フラクタルではありませんし、カオスによる現象とは考えられません。

この方法では、測ろうとする対象図形の計測点が多いと、フラクタル次元を求める操作が煩雑となり、次元を求めることが実際上不可能になってきます。

(2) 相関次元 :

多量の計測点があった場合に利用できる方法です。2体相関関数の積分

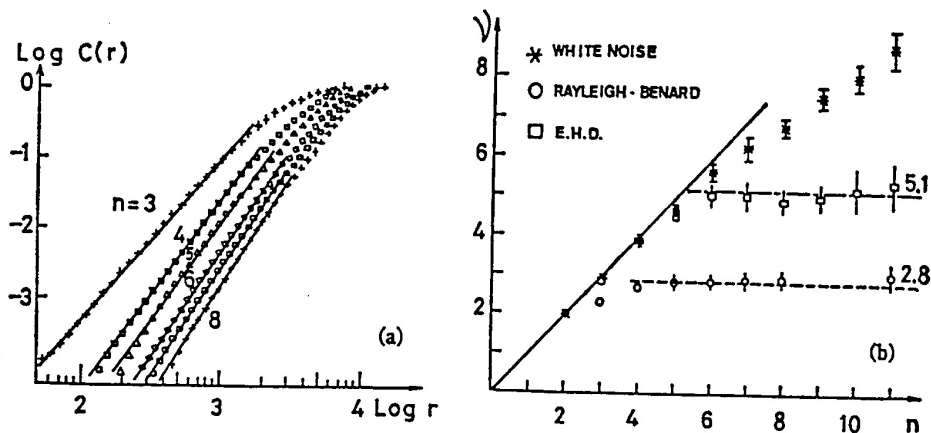
$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(r - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)$$

$$H(z) = \begin{cases} 1 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

を考えます。被覆次元を求めたのと同様に、異なる r に対して

$$C(r) \sim r^\nu \quad \text{または、} \quad \nu \sim \frac{\log C(r)}{\log r}$$

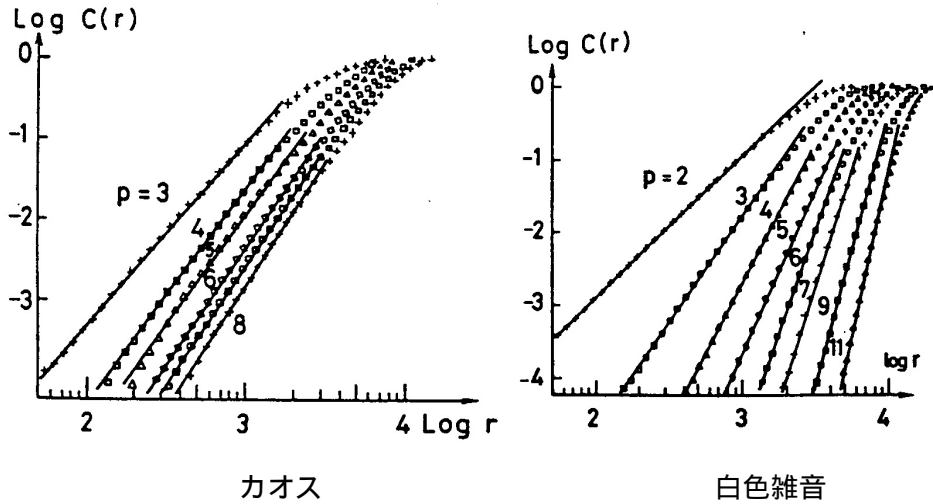
となるとき、この ν のことを相関次元と呼びます。この計算は、計測点のすべてのペアに対して2点間の距離を測り、累積分布関数 $C(r)$ を求めれば ν は求まります。実際に相関次元を求めるプログラム例を、プログラムリストに示しました。



相関次元の計測⁵⁾

1 ~ 6次元程度の整数位相次元において、累積分布関数 $C(r)$ を求め ν が一定の値をもつ場合、その相関次元がフラクタル次元となります。もし計測している信号がランダムな

白色雑音であると、整数位相次元を増やすと相関次元も一緒に増え、定数となりません。もし信号が周期的なものなら、相関次元を求めるための $\log C(r)$ と $\log r$ の関係が直線となりませんので、相関次元を求めることが出来ません。このため、相関次元を求める操作により、カオスと白色雑音をはっきりと区別することができます。



7.2 アトラクタの埋め込み

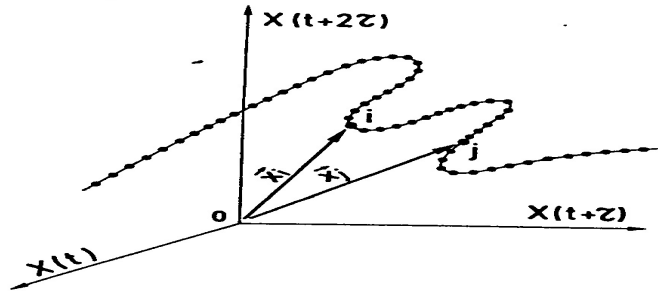
相関次元を求める方法は、次のように考えることもできます。時系列の信号があり、それを時間間隔 τ でサンプリングします。この値を多次元の位相空間に再構成します。時系列の信号 s_n から、 d 次元への埋め込みを行うために、時間間隔 τ として

$$\vec{x}_i = (s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, s_{i+3}, \dots, s_{i+(d-1)})$$

を作ります。例えば、 d を 3 次元とすると、

$$\vec{x}_i = (s_i, s_{i+1}, s_{i+2})$$

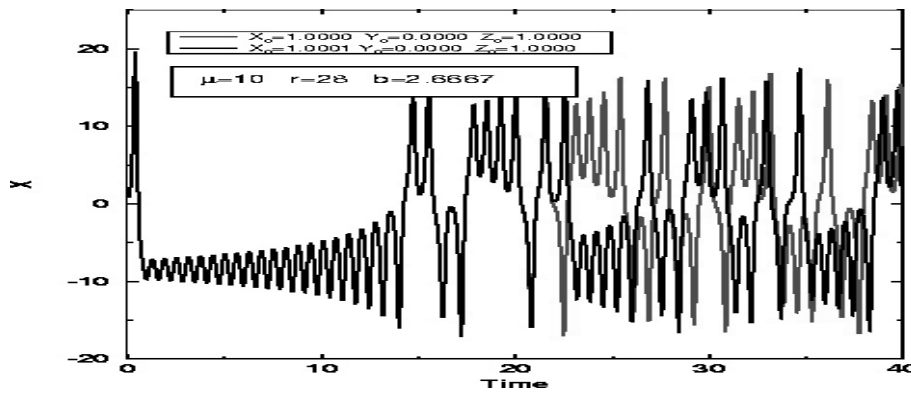
から、3次元空間上の1点 \vec{x}_i を構成することができます。これを繰り返すと、時系列から3次元空間に新しいアトラクタを構成することができます。この図形のフラクタル次元を被覆法などによって計算すると、相関次元を求めることができます。



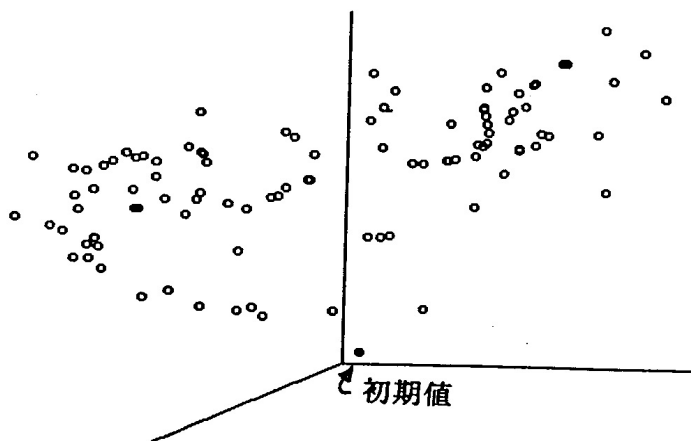
埋め込みによる相関次元の決定

7.3 初期条件の違いによる軌道変化

カオスの特徴の一つに、初期条件がわずかに異なっていると、指数関数的に軌道の差が大きくなっていく性質があります。この様子を図に示します。これもカオスであるかどうかを判定する方法として使えます。



初期条件による軌道の違い



ローレンツアトラクタにおける 100 個の異なる初期値による発散

系はローレンツアトラクタで、異なる 100 個の初期値（差は 10^{-6} 程度）から出発し、発散していく様を表しています。時間に対する軌道の差の変化率を \log で表したのがリアプノフ指数です。リアプノフ指数が正の数であると、軌道の差は指数関数的に発散していきますのでカオスであることがわかります。

8 カオスの応用⁶⁾

カオスにより発生する色々な現象を工学的に利用しようとするのが、すでに色々試みられています。カオスの発生には、定常状態・周期現象・不規則カオス状態のシナリオがありますから、それぞれに対応した、カオスの性質を利用して、系の設計が行われています。

- カオスを避けるようにする：
系の現象がカオスの状態に入らないように制御する方法をとる。
- 周期現象を利用する：
カオスの前過程としての分岐による周期状態を積極的に利用し、異なる周期状態の間の選移や定常状態と周期状態の選移関係を利用する。
- カオスの状態変化を利用する：
カオスの状態（雑音信号）から信号系のフラクタル次元を求め、フラクタル次元の変化により系の制御を行う。

それぞれの工学的な応用については、調査が行われており、次のような可能性が考えられています。

- カオスコンピュータ：
カオスニューラルネットワーク，最適化問題，学習問題，自己組織化
- 決定論的非線形予測：
気象・地震・経済予測，環境・生物資源予測，疫学予測
- カオスの同定：
複雑な系のモニタリング，音声合成
- バイオカオス：
脳波・心電図・脈波の解析・診断，睡眠・麻酔のモニタリング，感性工学
- カオスメモリ：
大容量メモリ，連想メモリ，メモリ検索
- カオス符号化：
画像圧縮，暗号，通信

- カオスパターン認識：
画像認識・抽出，知能センサー，音声認識
- カオスアート：
カオスCG・音楽
- カオスゆらぎ：
簡単な制御系を持つ家電製品
- カオスのパッケージング：
電子回路，光電子回路，人工膜
- カオスの発生と制御：
カオス振動の除去，乱流・燃焼の制御，カオス共振，カオス制御

この調査の内容については、「日経サイエンス」3月号のカオスの特集で詳しく述べられています。

8.1 カオスコンピュータ

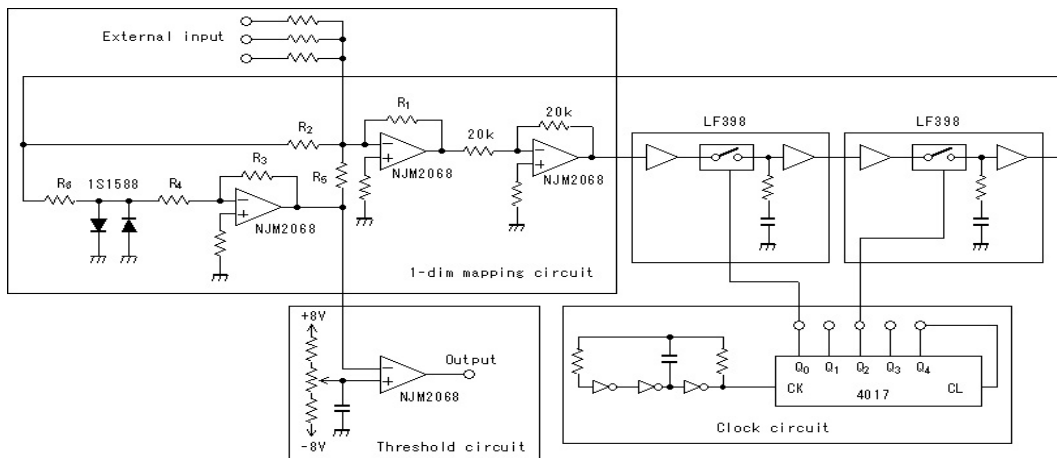
現在のコンピュータといえば、状態を0か1で演算する、デジタルコンピュータが主流になっています。デジタルコンピュータは、0や1で表される数値の取扱いには能力を発揮していますが、顔の認識や判断，学習機能などは不得意な分野です。現在のコンピュータでもこのような処理を行うことは出来ますが、天文学的に高速な計算処理能力と大容量のメモリーが必要となってきます。一方人間は、数値を扱う計算ではデジタルコンピュータにとてまかないませんが、顔の認識などは瞬時に行うことができます。そこで人間の神経系をアナログ系でモデル化したのが、ニューロコンピュータです。ニューロコンピュータでは、複数の入出力が相互に組み合わせられ、帰還系を構成しています。そのため、組み合わせられた帰還系全体がプログラムであり、データの流れを表しています。

生物の神経伝達系は、神経の内部ではアナログ的な処理が行われ、神経伝達系ではデジタル的な処理が行われていると考えられています。そこで、このニューロ系のもつ複数の入出力に、しきい値をもったデジタル的な処理が行われるように、アナログ的な振動状態でデジタル的な神経興奮状態を表現するカオス系を組み合わせたものが、カオスを利用したコンピュータです。

20年ほど前までは、デジタルコンピュータとアナログコンピュータは、ともに大きく発展するものと考えられ研究も行われてきました。構造が単純で高速化が進んだディジ

タルコンピュータに隠れて、正確さに劣りいつのまにか低速になってしまったアナログコンピュータが表に出てくることはなくなってしまいました。しかし、カオスという簡単で決定論的なアナログコンピュータの出現で、アナログコンピュータが復活してきたと言えます。デジタルコンピュータでは、予め与えられたプログラム手順によって処理が行われ、途中でプログラムを変更することはできません（ノイマン型コンピュータと呼ばれています）。カオスの系ですと、計算機を構成している素子自体がプログラムの一部ですから、必要に応じて素子の状態を変化させ、最適な処理を行える可能性がでてきます（非ノイマン型コンピュータと呼ばれています）。

カオスコンピュータ素子の例としては、2つの結合したカオス発振器を結合の程度に合わせて系の状態を変化させようというものです。2つの結合した発振器を1つの素子とします。異なる素子の間は相互に入出力がつながっており、自己の状態から回りの状態を変化させ、それにより自分の状態も変化するような構造になっています。1度処理したデータが再び入力として使われるように、フィードバック系を構成しています。素子の状態は、2つの発振器が同期している場合には神経興奮状態、非同期では神経非興奮状態として表されます。このようなモデルは、人間の神経伝達系をモデル化していると考えられるため、データの処理や判断、認識、学習能力などが、デジタルコンピュータと比較して、著しく高速であることが確かめられています。



カオスコンピュータ⁶⁾

8.2 IFS(Iterated Function System)

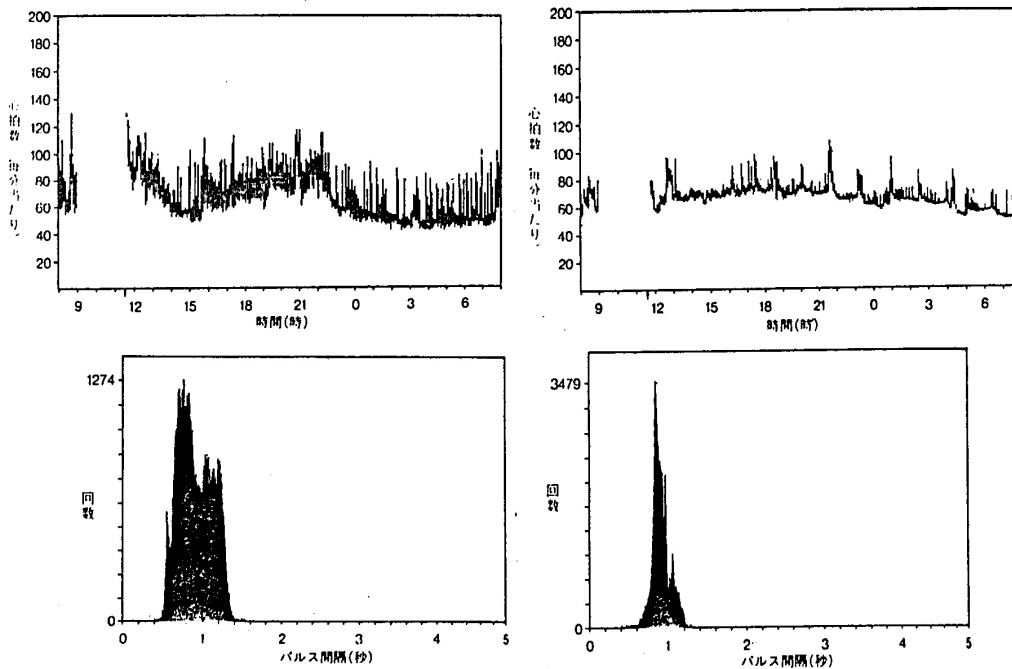
カオスとは、系が自己相似的なフラクタルであることです。2次元の複雑な図形を考えてみましょう。自己相似図形なら、縮小写像の元となる原型の図形が存在することでしょう。逆に言うと、原型となる図形が縮小写像の繰り返しにより複雑な図形を作るからフラクタルなのです。

2次元の複雑な図形が縮小写像によって構成されているならば、原型の図形と、縮小写像の方法がわかると、原型の図形から複雑な図形を再構成できるはずですが、また、決定論的なカオスですと、2次元の複雑な図形から原型となる図形を求めることもできるはずですが、原型となる図形を縮小写像することは、原型の図形のアフィン変換を繰り返し操作することです。このアフィン変換の座標変換行列求め、図形を再構成する方法をIFS (Iterated Function System) と呼びます。簡単な座標変換行列のパラメータと原型の画像だけで複雑な図形を再構成できますので、2次元画像データの圧縮方法として注目されています。これは画像の質を劣化することなく高速にデータを転送したり、多量に蓄積するためにも重要な技術の1つです。

8.3 脈動による健康診断

生命活動の色々な面で、カオスによると思われる現象が発見されています。特に有名なものに、心臓脈動のカオス性があります。心臓の脈動は、一定の脈拍数でリズムを刻んでいるように感じられます。しかし実際の計測によると、周期的ではなくカオス的な信号を発生し常に揺らいだ脈動であり、健康な人ほどよりカオス的であることが知られています。体の活動の変化に心臓が脈動の変化として柔軟に対応していると考えれば納得できるでしょう。逆に心臓の悪い人の脈動は周期的であり、急激な変化に対応できないことを示しています。

1日の脈動の変化を測定し、脈動の間隔と心拍数の関係をスペクトル表示したものを図に示しました。

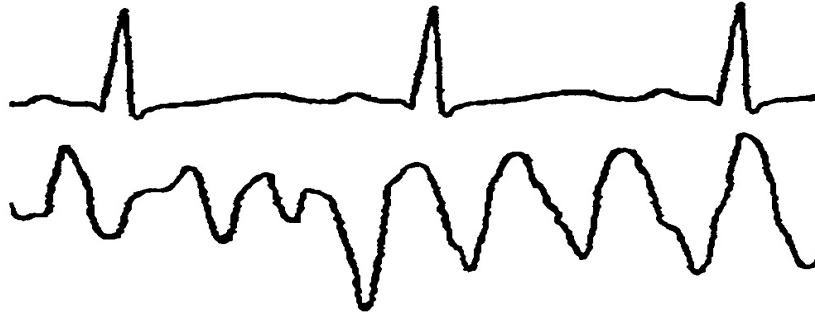


脈動変化 (健全)

脈動変化 (不健全)⁸⁾

スペクトルが連続的に広がっていると、カオス的であると言えます。しかしこの実験は、1日の脈動データが必要なので、簡単に計測することはできません。

このような脈動のカオス性から、健康状態を簡便に検査しようと作られたのが、カオスアトラクトグラムプロセッサです。20～30秒程度の脈動信号を指先から検出し、10000点程度のデジタル信号としてサンプリングし、それをアトラクタ表示します。このアトラクタがストレンジであればあるほど、その人の心臓は健全であることを示しているといえます。



心臓脈動



3/13

カオスアトラクタ

【国産】コンピュータ
システム(約10万円)で
社科院産院、の
92・474・5106
は、カオス理論を用いた
健康状態の診断「生体カ
オス抽出システム装置」B
CD(写真)を発売した。

健康状態の診断「生体カオス抽出システム装置」B CD(写真)を発売した。

健康状態を診断する
ため、脈波データを抽出
し、良好な結果を得る
ことが可能である。

健康状態を
画面に表示

コンピュータで分析、特殊
図形(カオス図)に発露し
たカオスパターンを、特
定健康状態に照準し、健康
状態を診断する。

健康状態を
画面に表示

コンピュータで分析、特殊
図形(カオス図)に発露し
たカオスパターンを、特
定健康状態に照準し、健康
状態を診断する。

健康状態を
画面に表示

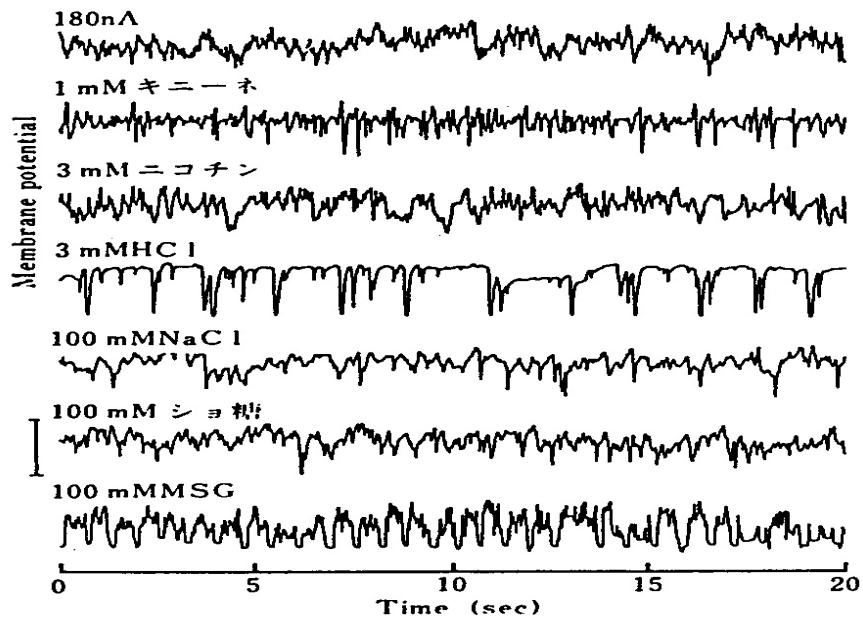
コンピュータで分析、特殊
図形(カオス図)に発露し
たカオスパターンを、特
定健康状態に照準し、健康
状態を診断する。

カオスアトラクトグラムプロセッサ

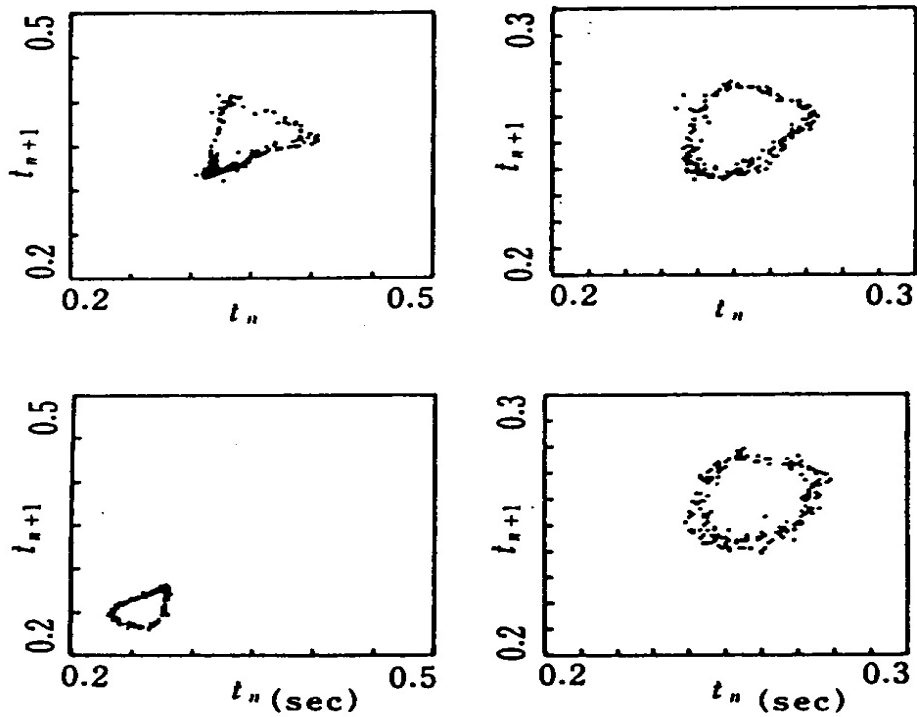
8.4 味覚センサ

心臓と同じように、生体内のカオス現象として味覚の研究も行われています。生体内の生体膜をモデル化した脂質ジオレイルフォスフェート(DPOH)による味覚センサーです。生体膜を、低塩濃度側(1mM)を味細胞外、高塩濃度側(100mM)を細胞内として、膜電位の測定を行います。苦み、酸味、塩味、うま味、甘味などに相当する物質を計測するため、わずかに直流電流を流してやると、味物質に依存した揺らいだ自励発振信号が発生します。この自励発振信号はフラクタル次元を持ち、カオス的であることが確認されています。さらに味物質やその濃度変化によりアトラクタが変化し、味覚センサーと

して利用できることを示しています。



味覚物質による自励発振



味覚物質によるアトラクタ⁹⁾

9 参考文献

カオスとフラクタルに関する専門書は数多く出版されていますが、入門書には次のような書籍があります。

- 「カオス - 新しい科学をつくる - 」 J. グリック著、新潮文庫 (ク-18-1)
- 「カオスとフラクタル - 非線形の不思議 - 」 山口 昌哉 著、講談社ブルーバックス B652
- 「カオス - 混沌のなかの法則 - 」 戸田 盛和 著、岩波書店 (NEW SCIENCE AGE 46)

参考文献

- 1) 「カオスとフラクタル - 非線形の不思議 - 」 山口 昌哉 著、講談社ブルーバックス B652
- 2) "The fractal geometry of nature", B. B. Mandelbrot, W. H. Freeman
「フラクタル」 高安 秀樹 著、朝倉書店
- 3) "The double scroll", T. Matumoto *et al.*, IEEE Trans. Circuits Syst., CA-32, 797 (1985)
- 4) "Chaos form switched-capacitor circuits: Discrete maps", A. Rodriguez-Vazquez *et al.*, Proc. IEEE, **75**, 1090 (1987)
- 5) 「フラクタル科学」 高安 秀樹編 著、朝倉書店
- 6) 「カオス」 合原 一幸編 著、サイエンス社
- 7) "Fractal everywhere", M. Banskly, Academic Press
「フラクタル・デザイン」 M. F. パーンスレイ著、竹迫 一雄, 二之宮 弘 訳、森北出版
- 8) "生命現象を説明するカオス" 西江 弘、日経サイエンス, No. 3 (1992)
- 9) "カオスで味を測る" 都甲 潔、数理科学、No. 6 (1992)
- 10) "An inductorless double scroll chaotic circuit", T. Weldon, Am. J. Phys. **58**, 939 (1990)
- 11) "Generation of noise by electric iteration of the Logistic map", G. McGonigal *et al.*, IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-34, 981 (1987)
- 12) 「フラクタル科学」 高安 秀樹編 著、朝倉書店
- 13) 「カオス入門」 長島 弘幸、馬場 良和 著、培風館
- 14) 「カオス - 混沌のなかの法則 - 」 戸田 盛和 著、岩波書店 (NEW SCIENCE AGE)
- 15) 「フラクタルってなんだろう」 高安 秀樹、高安 美佐子 著、ダイヤモンド社